

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА

**Проблемы конформной гравитации как
альтернативы тёмной материи**

Студентка 213 группы
Лихачева Злата Константиновна

Научный руководитель
член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук,
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва, 2026

Содержание

1. Введение	2
2. Конформная гравитация	2
2.1 Общее представление о теории	2
2.2. Вакуумное решение	3
2.3. Гравитационный потенциал	4
2.4. Феноменологическая закономерность	5
3. Критика конформной гравитации	5
4. Карликовые галактики	9
5. Численное моделирование	10
Заключение	18
Список литературы	18

1. Введение

Конформная гравитация является альтернативной ковариантной метрической теорией гравитации, уравнения поля которой содержат высшие производные. Предполагается, что данная теория способна объяснить динамику космологических объектов и кривые вращения галактик без привлечения тёмной материи. Однако как и любая теория, претендующая на фундаментальность, конформная гравитация множество раз претерпевала критику со стороны исследователей. Данная работа посвящена рассмотрению проблем теории конформной гравитации.

2. Конформная гравитация

2.1 Общее представление о теории

В отличие от Общей Теории Относительности Эйнштейна, конформная гравитация наделена дополнительной симметрией — локальной конформной инвариантностью. Принцип конформной инвариантности требует, чтобы действие оставалось неизменным при любых локальных растяжениях пространства $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$ [1]. Данному условию удовлетворяет следующее действие [2]:

$$I_W = -\alpha_g \int d^4x \sqrt{-g} C^{\lambda\mu\nu\kappa} C_{\lambda\mu\nu\kappa} = -2\alpha_g \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\kappa} R^{\mu\kappa} - \frac{1}{3} (R^\alpha_\alpha)^2 \right] \quad (1)$$

где $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ представляет собой тензор кривизны Вейля:

$$C_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\lambda\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu} R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa} R_{\lambda\nu}) + \frac{1}{6} R (g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}) \quad (2)$$

Конформное действие квадратично тензору Римана, поэтому его уравнения движения являются функциями производных четвёртого порядка от метрики и при наличии источника материи принимают вид:

$$4\alpha_g W^{\mu\nu} = 4\alpha_g \left(2C^{\mu\lambda\nu\kappa}_{;\lambda;\kappa} - C^{\mu\lambda\nu\kappa} R_{\lambda\kappa} \right) = 4\alpha_g \left(W_{(2)}^{\mu\nu} - \frac{1}{3} W_{(1)}^{\mu\nu} \right) = T^{\mu\nu}, \quad (3)$$

где тензоры $W_{(1)}^{\mu\nu}$ и $W_{(2)}^{\mu\nu}$ задаются формулами

$$W_{(1)}^{\mu\nu} = 2g^{\mu\nu}(R_\alpha^\alpha)_{;\beta} - 2(R_\alpha^\alpha)_{;\mu;\nu} - 2R_\alpha^\alpha R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R_\alpha^\alpha)^2 + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R_\alpha^\alpha)^2 \quad (4)$$

$$W_{(2)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R_\alpha^\alpha)_{;\beta} + R^{\mu\nu;\beta} - R^{\mu\beta;\nu} - R^{\nu\beta;\mu} - 2R^{\mu\beta}R^\nu{}_\beta + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}. \quad (5)$$

Ф.Манхейму и Д.Казанасу [1, 3] удалось найти аналитическое решение уравнения (3) в замкнутой форме в случае стандартной статической сферически-симметричной геометрии с линейным элементом

$$ds^2 = B(r)c^2dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (6)$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. В частности, используя конформную симметрию, они показали, что можно преобразовать этот линейный элемент в такой, который был бы конформен линейному элементу $A(r) = 1/B(r)$, а уравнение (3) свести к соотношению

$$\nabla^4 B(r) = B'''' + \frac{4B'''}{r} = \frac{3}{4\alpha_g B(r)}(T_0^0 - T_r^r) \equiv f(r), \quad (7)$$

Общее решение уравнения (7) задаётся формулой

$$B(r) = -\frac{r}{2} \int_0^r dr' r'^2 f(r') - \frac{1}{6r} \int_0^r dr' r'^4 f(r') - \frac{1}{2} \int_r^\infty dr' r'^3 f(r') - \frac{r^2}{6} \int_r^\infty dr' r' f(r') + \hat{B}(r), \quad (8)$$

где $\hat{B}(r)$ удовлетворяет $\nabla^4 \hat{B}(r) = 0$.

2.2 Вакуумное решение

Точное вакуумное решение уравнения (7) имеет вид

$$B(r) = 1 - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r} - 3\beta\gamma + \gamma r - \kappa r^2. \quad (9)$$

В случае вакуума решения (8) и (9) совпадают, что позволяет определить [2]

$$\begin{aligned}\gamma &= -\frac{1}{2} \int_0^{r_0} dr' r'^2 f(r') \\ \beta &= \frac{1}{12} \int_0^{r_0} dr' r'^4 f(r') \\ \kappa &= \frac{1}{6} \int_{r_{clus}}^{\infty} dr' r' f(r'),\end{aligned}\tag{10}$$

где r_0 — радиус источника, r_{clus} — типичный масштаб скопления галактик.

2.3. Гравитационный потенциал

В слабых гравитационных полях и при нерелятивистской материи $B(r) = 1 + 2\varphi(r)$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\nabla^4 \varphi(r) = \frac{1}{2} f(r)\tag{11}$$

Решения уравнения (7) зависят от распределения вещества $f(r)$. Ф.Манхейм предлагает следующее распределение [3]:

$$f(r) = -2\gamma \frac{\delta(r)}{r^2} - \frac{3\beta(2 - 3\beta\gamma)}{2} \left[\nabla^2 - \frac{r^2}{12} \nabla^4 \right] \left[\frac{\delta(r)}{r^2} \right]\tag{12}$$

Подставляя эту функцию в выражение для потенциала $\varphi(r)$ и учитывая тривиальное вакуумное решение $-\kappa r^2$ уравнения (7), получим выражение для конформного потенциала

$$\varphi(r) = -\frac{\beta}{r} + \frac{\gamma r}{2} - \frac{\kappa r^2}{2}\tag{13}$$

Квадратичное слагаемое доминирует в выражении (13) для потенциала на космологических масштабах. Вблизи источника его вкладом можно пренебречь и получить выражение для конформного потенциала следующего вида:

$$\varphi(r) = -\frac{\beta}{r} + \frac{\gamma r}{2}\tag{14}$$

2.4. Феноменологическая закономерность

В своей работе 1997 года [5] Ф.Манхейм обнаружил при исследовании данных вращения 11 галактик различной светимости, что центростремительное ускорение на последних измеренных точках удовлетворяет универсальному феноменологическому соотношению

$$\frac{v^2}{c^2 r} \Big|_{\text{last}} = \frac{\gamma_0}{2} + \frac{\gamma^* N^*}{2} + \frac{\beta^* N^*}{r^2} - \kappa r, \quad (15)$$

где $N^* = \frac{M}{M_\odot}$, $\beta^* = \frac{M_\odot G}{c^2}$. Манхейм интерпретировал γ_0 как новую универсальную константу, имеющую космологическое происхождение и обусловленную глобальным Хаббловским потоком, γ^* — как вторую универсальную константу. Им были получены следующие значения постоянных:

$$\gamma_0 = 3.06 \times 10^{-30} \text{ см}^{-1}, \quad \gamma^* = 5.42 \times 10^{-41} \text{ см}^{-1}, \quad \beta^* = 1.48 \times 10^5 \text{ см},$$

$$\kappa = 9,54 \times 10^{-54} \text{ см}^{-2}$$

В своих статьях, посвящённых конформной гравитации, Ф.Манхейм часто неявно использует анзац $\gamma = \gamma_0 + \gamma^* N^*$. В этом легко убедиться, используя выражение для конформного потенциала (14) и соотношение (15).

3. Критика конформной гравитации

Теория конформной гравитации неоднократно подвергалась критике со стороны исследователей. Так, например, Li-Xue Yue и Da-Ming Chen, используя выборку галактик и их скоплений, провели проверку предсказаний конформной гравитации с помощью статистического анализа сильного гравитационного линзирования [6]. Они вычисляли для каждой рассматриваемой системы значение γ^* , необходимое для объяснения наблюдаемого угла отклонения света без привлечения тёмной материи. Было обнаружено, что значение γ^* не может быть постоянным и зависит от звёздной массы M галактик или звёздных скоплений. В статье [8] при анализе выборки из 43 карликовых галактик, Li-Xue Yue

и Da-Ming Chen получили эмпирическую формулу

$$\gamma^* = 2.75 \times 10^{-28} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-0.963} \text{ m}^{-1} \quad (16)$$

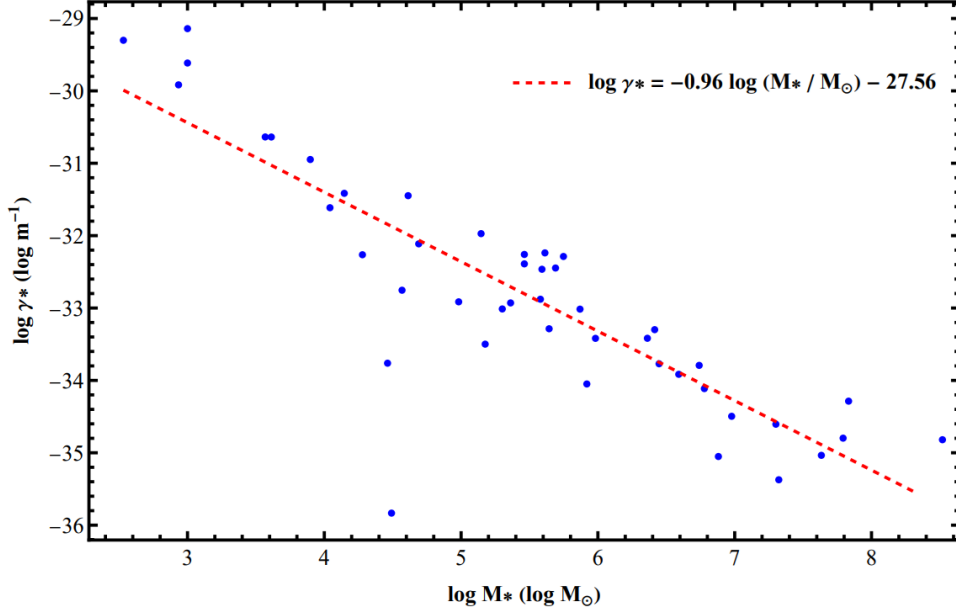


Рис. 1: График зависимости $\log \gamma^*$ от $\log M^*$, полученный Li-Xue Yue и Da-Ming Chen в [8]

Теория конформной гравитации также подвергалась критике и со стороны теоретического содержания. М.С. Campigotto, А. Diaferio и L. Fatibenes в статьях [7], [16] провели анализ конформной гравитации. Они показывают, что конформную гравитацию можно корректно интерпретировать как калибровочную теорию. Записывая уравнения поля в формализме калибровочных теорий и используя теорему Нётер, они получают законы сохранения и выражения для суперпотенциалов в рамках теории конформной гравитации. Затем авторы рассматривают отклонение света в точечной гравитационной линзе. Считая, что две шварцшильские метрики — одна с линзой в начале системы координат, другая — без линзы, асимптотически совпадают на бесконечных расстояниях, с использованием закона сохранения они получают, что в таком случае необходимо выполнение равенства $\gamma = 0$. Это означает, что из конформного потенциала исчезает линейный член, отвечающий за имитацию роли тёмной материи в стандартной модели. Это приводит к невозможности конформной гравитации воспроизвести галактическую феноменологию без помощи тёмной материи.

С другой стороны, полученное М.С. Campigotto и А. Diaferio утверждение

о нулевом γ может иметь и ответную критику. Они получают вывод $\gamma = 0$, опираясь на классическую дифференциальную геометрию и законы сохранения, связанные с диффеоморфизмами. Сам же Ф.Манхейм в своих статьях, посвящённых теории конформной гравитации, заявляет, что для его теории на квантовом уровне неприменим эрмитов подход; конформная гравитация корректно работает именно при \mathcal{PT} -симметрии. Основная идея данной симметрии заключается в том, что \mathcal{PT} -симметричная система не изменяется при одновременном изменении знака всех её пространственных координат и обращении назад течения времени. При этом \mathcal{PT} -симметричная система может не обладать ни \mathcal{P} -, ни \mathcal{T} -симметрией по отдельности. В \mathcal{PT} -симметрии вместо стандартного эрмитова сопряжения используется \mathcal{PT} -сопряжение, и вероятности (нормы) вычисляются другим образом. В статье [17] J. Alexandre, P. Millington и D. Seynaeve показали, что в неэрмитовых теориях стандартная теорема Нётер не работает — инвариантность лагранжиана относительно непрерывной симметрии не гарантирует существования сохраняющегося тока. В то же время в статье [18] Qi-Cheng Wu¹, Jun-Long Zhao и др. предлагают расширенную версию теоремы Нётер для конкретно \mathcal{PT} -симметричных систем, в которой сохраняется обобщённое ожидаемое значение оператора, вычисляемое в рамках биортогональной квантовой механики. Таким образом, в \mathcal{PT} -симметрии переопределяются понятия сохраняющегося тока и сохраняющегося заряда. Тогда вывод о нулевом γ совершенно необязательно будет корректным в \mathcal{PT} -симметричном пространстве. Для проверки корректности утверждения $\gamma = 0$ следует провести анализ теории конформной гравитации, аналогичный вышеописанному в статьях [7], [16] М.С.Сампиготто и др., но уже в рамках \mathcal{PT} -симметричного пространства.

Вышеописанное утверждение $\gamma = 0$ приводит к противоречию экспериментальным данным. Из анзаца $\gamma = \gamma_0 + \gamma^* N^*$ тогда следует, что $\gamma^* = -\gamma_0 \frac{M_\odot}{M} < 0$. Но это прямо противоречит полученному эмпирически соотношению (16), в котором γ^* неотрицательно.

Возможно ли избежать данное расхождение? От линейного вида анзаца $\gamma = \gamma_0 + \gamma^* N^*$ зависит линейность уравнений движения и выполнение принципа суперпозиции, справедливого в конформной гравитации. Изменение характера зависимости γ от γ_0, γ^* на нелинейный приведёт к возникновению новой теории гравитации, слабо связанной с исходной конформной гравитацией

Ф.Манхейма.

Можно попытаться привести анзац к виду $\gamma = \gamma_0 - \gamma^* N^*$, поменяв знак γ^* . В [2] показано, что $\gamma^* = -\frac{1}{2} \int_0^{r_0} r'^2 f^*(r') dr'$, где функция $f^*(r')$ является частным случаем функции распределения вещества $f(r)$. Тогда изменение знака γ^* приведёт к смене знака $f(r)$, которая из уравнения (7) приведёт к изменению знака метрической функции $B(r)$. Так как из [3] $-g_{00} = \frac{1}{g_{rr}} = B(r)$, то изменение знака $B(r)$ эквивалентно изменению знака всей метрики, что не меняет физическую суть проблемы.

Функция распределения материи $f(r)$ для точечного источника, используемая в теории конформной гравитации, постулируется Ф.Манхеймом и не следует прямым образом из вейлевской гравитации. Её вид определяется формулой самого потенциала конформной гравитации и не является при этом единственным выбором. Таким образом, подбор функции распределения $f(r)$ носит феноменологический характер и не является однозначным, что может ставить под сомнение предсказательную силу теории.

Как и другие теории поля с производными высших порядков, конформная гравитация сталкивается с проблемой призраков. Действие (7) конформной гравитации содержит слагаемые противоположных знаков, что приводит к тому, что структура пропагатора имеет вид [9]

$$D(k) \sim \frac{1}{k^2 - M_2^2} - \frac{1}{k^2 - M_1^2}, \quad (17)$$

где M_1 и M_2 — массы двух мод. Тогда одна из мод имеет отрицательную норму — то есть является «призраком». Это делает теорию неунитарной и приводит к отрицательным вероятностям, что нефизично.

Ф.Манхейм вместе с К.Бендером предпринимает попытку спасения теории конформной гравитации путём рассмотрения \mathcal{PT} -симметрии, в которой от гамильтониана не требуется эрмитовость [10]. При переопределении нормы с помощью \mathcal{CPT} -оператора отрицательные нормы становятся положительными, и теория восстанавливает свою унитарность, что полностью решает проблему призраков.

При этом данный подход обладает недостатками. В статье [11] Yi-Chan Lee, Min-Hsiu Hsieh и др. показано, что при локальности \mathcal{PT} -симметрии в пространстве-времени нарушается принцип невозможности сверхсветовой пе-

передачи сигналов Специальной Теории Относительности. Тогда в теории, использующей \mathcal{PT} -симметрию, становится возможной мгновенная передача информации на любое расстояние, что нарушает принцип причинности событий.

В то же время в статье [14] G. Japaridze, D. Pkhrel, Xiao-Qian Wang показали, что при использовании \mathcal{CPT} -нормы принцип невозможности сверхсветовой передачи сигналов может быть сохранен для \mathcal{PT} -симметричных систем. Ф.Манхейм для анализа конформной гравитации вводит симметрию глобально, а не локально, что гипотетически может позволить обойти данную критику.

4. Карликовые галактики

Карликовые галактики — это небольшие галактики, состоящие из нескольких миллиардов звёзд. Карликовые галактики, как правило, имеют низкую светимость. Для получения потенциала карликовых галактик будем использовать модель Пламмера – закон распределения объёмной плотности звёздной массы [15]:

$$\rho(r) = \frac{3M_0}{4\pi a^3 M_\odot} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-5/2}, \quad (18)$$

где M_0 — полная масса звёзд во всей галактике, a — характерный радиус Пламмера для звёздной компоненты.

Тогда общий потенциал всех звёзд галактики равен:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= -\beta \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \int_0^\infty dr' r'^2 \sin \theta \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\quad + \gamma \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \int_0^\infty dr' r'^2 \sin \theta \rho(r') |\vec{r} - \vec{r}'| = \\ &= -\frac{4\pi GM_\odot}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' - 4\pi GM_\odot \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \\ &\quad + \frac{2\pi\gamma}{r} \int_0^r \rho(r') (3r^2 r'^2 + r'^4) dr' + 2\pi\gamma \int_r^\infty \rho(r') (3r'^3 + r'^2) dr' \end{aligned} \quad (19)$$

Будем использовать уравнения Джинса, которые вытекают из бесстолк-

новительного уравнения Больцмана [12]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \quad (20)$$

где f — функция распределения, φ — гравитационный потенциал, v_i — скорость. Умножив это уравнение на v_j и проинтегрировав с учётом соотношения

$$\rho = \int f(x, v) d^3v \quad (21)$$

получим

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (22)$$

Используя определение дисперсии скорости

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j, \quad (23)$$

перепишем выражение (22) в виде

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\rho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (24)$$

Это и есть искомое уравнение Джинса, которое в сферических координатах записывается в виде:

$$\frac{\partial(\rho \sigma^2)}{\partial r} + \frac{2\rho(r)\beta \sigma^2(r)}{r} = -\rho(r) \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (25)$$

где параметр анизотропии $\beta = 1 - \frac{\sigma_\theta^2 - \sigma_\phi^2}{2\sigma_r^2}$ по определению.

5. Численное моделирование

Для проведения в данной работе численного моделирования динамики карликовых галактик была использована программа Gravsphere [13]. Она основана на непараметрическом методе восстановления распределения тёмной материи в сферических звёздных системах по наблюдаемым проекциям скоростей

звёзд и их распределению на небе.

Поскольку метод GravSphere предназначен в первую очередь для моделирования звёздных систем, содержащих тёмную материю, то для использования данного метода при моделировании карликовых галактик в конформной гравитации пришлось серьёзно изменить исходный код. В частности, уравнение Джинса (25), записанное в рамках Общей Теории Относительности

$$\frac{\partial(\rho\sigma^2)}{\partial r} + \frac{2\rho(r)\beta\sigma^2}{r} = -\rho(r)\frac{GM(r)}{r^2} \quad (26)$$

было заменено на его модификацию в конформной гравитации:

$$\frac{\partial(\rho\sigma^2)}{\partial r} + \frac{2\rho(r)\beta\sigma^2}{r} = -\rho(r) \left(\frac{N^*\beta^*c^2}{r^2} + \frac{N^*\gamma^*c^2}{2} + \frac{\gamma_0c^2}{2} - \kappa rc^2 \right) \quad (27)$$

Также при попытке адаптации кода GravSphere для расчётов в рамках конформной гравитации возникли серьёзные проблемы. Стандартный алгоритм МСМС, основанный на методе Монте-Карло с марковскими цепями и используемый в оригинальном GravSphere, оказался несовместимым с моделью конформной гравитации Ф. Манхейма. При анализе данных астрономических наблюдений функция правдоподобия принимала огромные отрицательные значения. Аффинно-инвариантный сэмплер МСМС, основанный на случайных блужданиях, оказался крайне чувствительным к данному масштабу: даже с жёстко заданными априорными ограничениями (priors) он не мог удержать значения параметров в допустимых диапазонах. Не привели к стабильной сходимости и попытки заменить жёсткие priors на мягкие (основанные на возврате очень малых чисел вместо отрицательных бесконечностей). Возможно, причина такого провала заключается в том, что алгоритм МСМС не может корректно перемещаться в пространстве параметров, когда логарифмическое правдоподобие меняется на много порядков, что вызывает неустойчивость цепей Маркова.

В качестве решения данной проблемы моделирования была осуществлена замена МСМС на метод вложенной выборки (Nested Sampling), реализованный в пакете dynesty. Данный метод не использует случайные блуждания и не требует настройки шкалы правдоподобия. Метод вложенной выборки последовательно удаляет точки с наименьшим правдоподобием и заменяет их новыми, ограниченными текущим уровнем правдоподобия. Такой подход совершенно

нечувствителен к абсолютным значениям логарифмической функции правдоподобия и гарантирует, что априорные границы будут соблюдаться автоматически.

В данной модифицированной версии Gravsphere динамически вычисляет значение N^* для каждого радиуса, основываясь на фотометрических данных. С помощью вышеописанного метода вложенной выборки данная программа получает наиболее вероятные значения свободных параметров системы, а также рассчитывает их погрешности.

Для проведения теста предсказаний теории конформной гравитации относительно динамики карликовых сфероидальных галактик были выбраны следующие объекты: Antlia II, Sextans и Draco. Antlia II имеет самую низкую поверхностную яркость среди всех обнаруженных галактик и характеризуется очень низкой плотностью тёмной материи. Большую часть содержимого галактики Sextans составляет тёмная материя, а галактика Draco характеризуется содержанием экстремального количества тёмной материи. Такой выбор галактик позволяет провести проверку предсказаний конформной гравитации и установить, способна ли данная теория объяснить динамику карликовых галактик с различным количественным содержанием предполагаемой тёмной материи без привлечения самой концепции тёмной материи.

При предобработке перед численным моделированием из фотометрических данных были получены значения звёздной массы для каждой галактики из выборки. Вычисленные значения масс совпали с общеизвестными, что отражено в таблице 1.

Название галактики	M (вычисленная программой)	M (литературная)
Antlia II	$8.8 \times 10^5 M_{\odot}$	$(8.8 \pm 1.2) \times 10^5 M_{\odot}$
Sextans dSph	$4.4 \times 10^5 M_{\odot}$	$(4.5 \pm 0.5) \times 10^5 M_{\odot}$
Draco dSph	$5.0 \times 10^5 M_{\odot}$	$(4.0 \pm 1.0) \times 10^5 M_{\odot}$

Таблица 1: Значения звёздных масс для каждой карликовой сфероидальной галактики, рассчитанные при предобработке фотометрических данных

В процессе численного моделирования были перепробованы несколько настроек модели, включающие как постоянную, так и переменную анизотропию Ваес с четырьмя параметрами; учитывающие четвёртые моменты скоростей (VSP) звёзд галактик, применяющие как однокомпонентный, так и трехкомпонентный Пламмер. Для галактик Sextans и Draco также применялась воз-

возможность учёта статистической погрешности, рассчитанной из результатов повторных измерений скоростей звёзд (по аналогии с [19]). Для Antlia II статистическая погрешность не была рассчитана ввиду отсутствия результатов повторных измерений для данной галактики, что объясняется тем, что она была открыта относительно недавно в ноябре 2018 г. Наилучшие результаты моделирования (с наименьшим значением χ_{red}^2) для всех трёх галактик из данной выборки были получены для модели с однокомпонентным Пламмером, постоянной анизотропией и учтённой (при наличии) систематической ошибкой измерений без учёта VSP. Использование более сложной модели с иными комбинациями параметров приводило к её переобучению на данных наблюдений и резкому повышению значений χ_{red}^2 . При этом сами найденные значения параметров конформной гравитации для каждой отдельно взятой галактики практически не изменялись при изменении настроек модели и значительных изменениях χ_{red}^2 , что свидетельствует об их устойчивости.

Значения χ_{red}^2 для галактик Antlia II, Sextans и Draco составили 11.737, 33,201 и 393.305 соответственно. Для всех трёх галактик χ_{red}^2 значительно превышает единицу, что свидетельствует о той или иной степени расхождения данных наблюдений с применяемой моделью конформной гравитации, причём несоответствие растёт вместе с предполагаемой долей тёмной материи в рассматриваемой галактике.

Результаты проведённого моделирования собраны в следующей таблице:

Название галактики	γ_0 , см ⁻¹	γ^* , см ⁻¹	κ , см ⁻²	χ_{red}^2
Antlia II	$(1.76 \pm_{-1.17}^{+1.07}) \times 10^{-27}$	$(3.86 \pm_{-2.34}^{+3.41}) \times 10^{-41}$	$(4.18 \pm_{-2.45}^{+3.76}) \times 10^{-49}$	11.737
Sextans dSph	$(1.65 \pm_{-1.12}^{+1.12}) \times 10^{-27}$	$(2.36 \pm_{-0.16}^{+0.17}) \times 10^{-37}$	$(9.04 \pm_{-0.70}^{+0.82}) \times 10^{-49}$	33.188
Draco dSph	$(1.61 \pm_{-1.09}^{+1.12}) \times 10^{-27}$	$(3.78 \pm_{-0.46}^{+0.47}) \times 10^{-38}$	$(3.58 \pm_{-0.18}^{+0.20}) \times 10^{-49}$	393.305
Литературные значения	3.06×10^{-30}	5.42×10^{-41}	9.54×10^{-54}	—

Таблица 2: Значения полученных констант конформной гравитации и качество фита для каждой карликовой сфероидальной галактики из выборки

Погрешности значений параметров конформной гравитации определялись с помощью использования медианы, 16-й и 84-й перцентилей апостериорных распределений. В отличие от классических MCMC-методов, вычисляющих симметричные погрешности на основе среднеквадратического разброса цепей, применяемый в данной работе метод Nested Sampling получает асимметричные ин-

тервалы, что является более информативным и корректным.

Почти все полученные значения параметров конформной гравитации оказались на несколько порядков больше значений, указанных в статьях Ф.Манхейма [20]. Только значение γ^* , полученное для Antlia II, сошло в пределах погрешности с литературным. При этом можно видеть, что значения γ_0 и κ , полученные для различных галактик, сходятся в пределах погрешностей друг с другом для всех галактик из данной выборки, т. е. γ_0 и κ являются для них константами. В то же время γ^* не является постоянным, причём зависит обратно пропорционально от звёздной массы самой галактики, что хорошо согласуется с эмпирической формулой, полученной Li-Xue Yue и Da-Ming Chen для карликовых галактик [8].

Также в ходе исследовательской работы по результатам моделирования для каждой галактики из выборки были построены графики профиля эффективной массы, создаваемой конформной гравитацией, и лучевой дисперсии скоростей (рис.2). Из левых графиков профиля эффективной массы для каждой галактики мы можем видеть, что с ростом радиуса $M(r)$ возрастает, а затем резко падает вблизи $r \approx 10$ кпк. Это объясняется тем, что на малых радиусах в уравнении для ускорения в конформной гравитации (15) доминирует ньютоновское слагаемое, а затем, по мере увеличения радиуса, его вклад начинает постепенно подавлять растущее по модулю отрицательное слагаемое $-\kappa r$. При дальнейшем увеличении радиуса конформная гравитация предсказывает отрицательные значения эффективной массы, что соответствует антигравитации и выглядит странно. Из правых графиков зависимости лучевой дисперсии скоростей от проекционного радиуса R мы видим, что для Antlia II практически все экспериментальные точки, соответствующие наблюдаемой лучевой дисперсии скоростей, принадлежат 68 % доверительному интервалу модели. Для галактики Sextans большинство точек не принадлежит 68 % доверительному интервалу, но при этом расположены достаточно близко к нему, для Draco же заметно очень сильное удаление экспериментальных точек от рассматриваемого интервала. Это подтверждает большее соответствие рассматриваемой модели конформной гравитации (с постоянной анизотропией, однокомпонентным Пламмером, отсутствием учёта VSP) экспериментальным данным для галактики Antlia II, чем для Sextans и Draco.

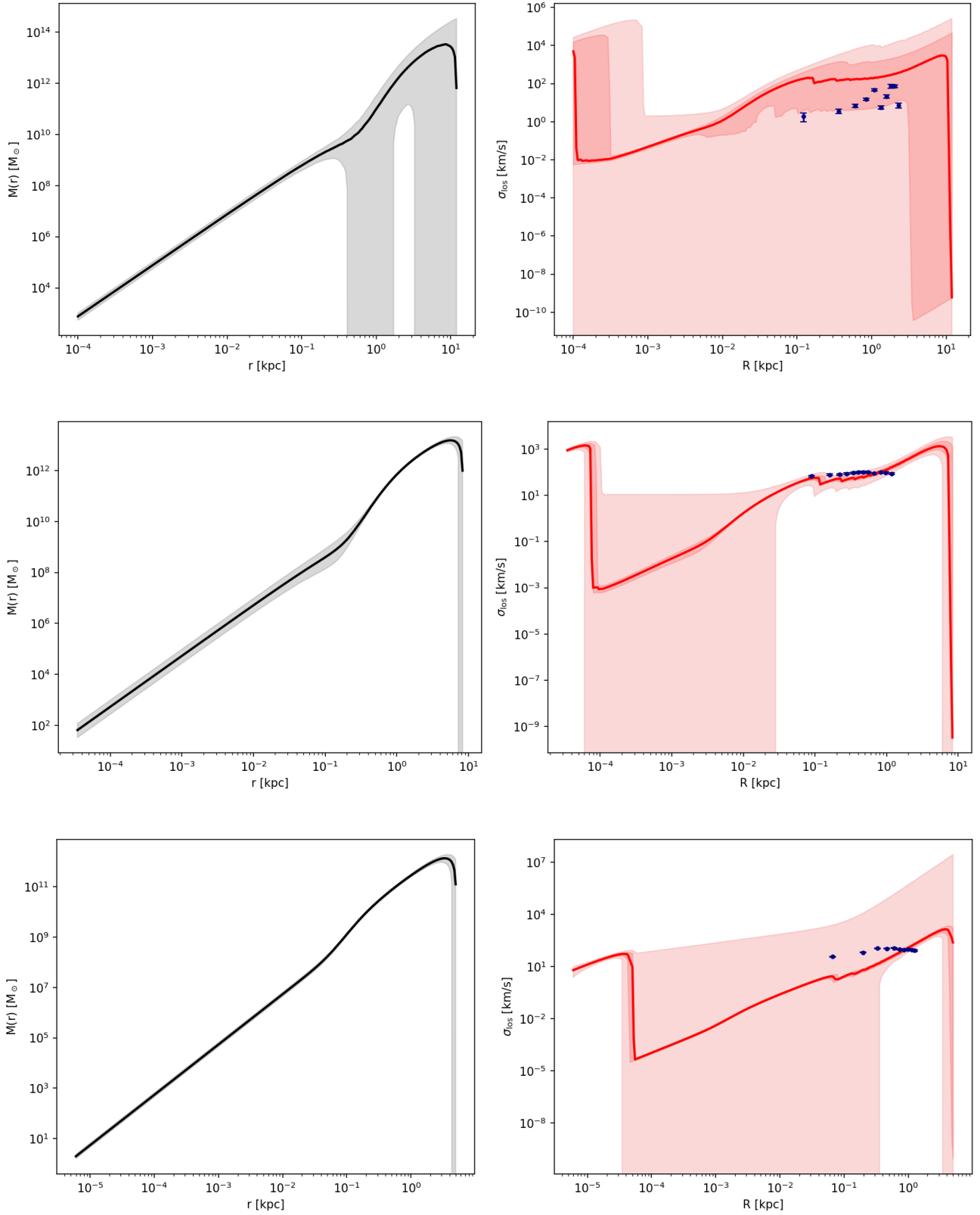
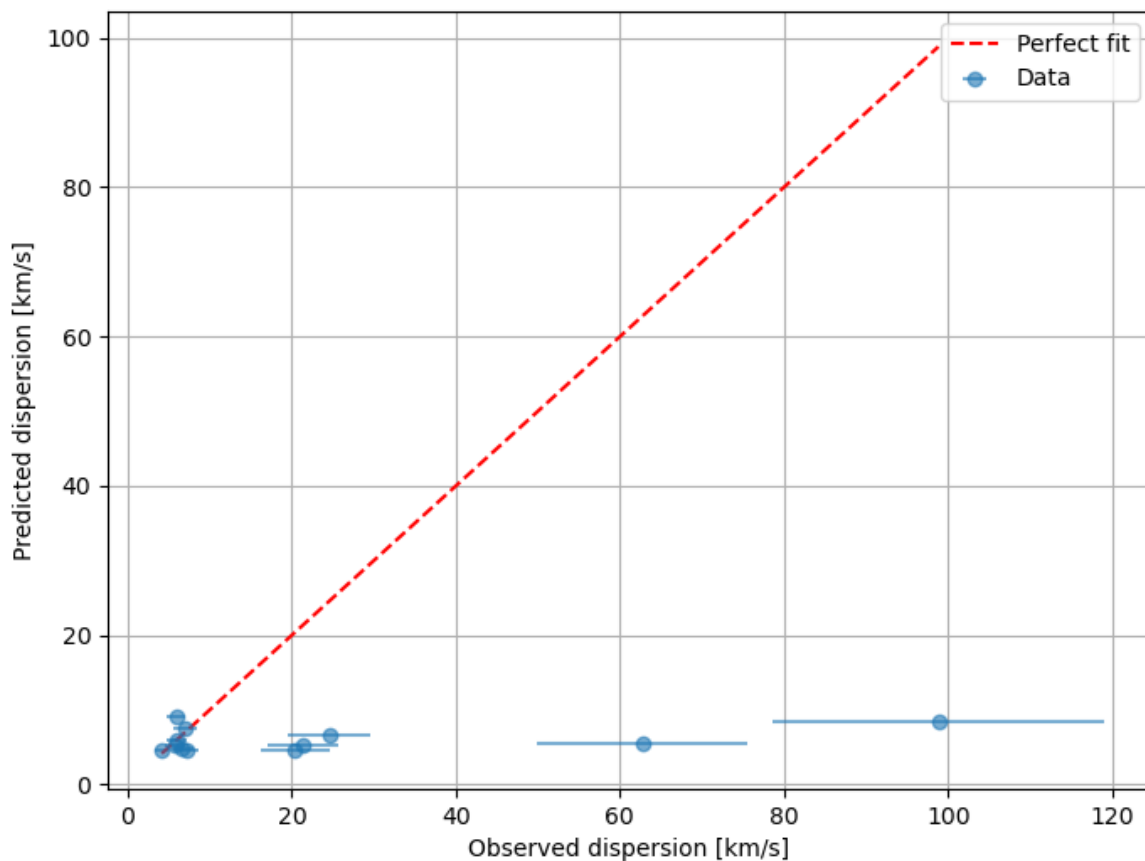


Рис. 2: Профили эффективной массы, создаваемой конформной гравитацией, и лучевой дисперсии скоростей для карликовых сфероидальных галактик Antlia II (верхний ряд), Sextans (средний ряд) и Draco (нижний ряд). Синими точками обозначены экспериментальные данные с указанием погрешностей, чёрной кривой соответствует медианное значение эффективной массы, красной кривой — медианное предсказание лучевой дисперсии скоростей. Серой областью обозначен 68 % доверительный интервал для эффективной массы, красной области соответствует 68 % доверительный интервал лучевой дисперсии скоростей, розовой области — 95 % доверительный интервал лучевой дисперсии, учитывающий экспериментальные погрешности.

Также при анализе результатов моделирования для каждой галактики из выборки были построены графики сравнения наблюдаемых и предсказанных значений лучевой дисперсии скоростей (рис.3). Из графика для Antlia II видно, что большинство точек расположены вблизи линии идеального совпадения, что соответствует $\chi_{\text{red}}^2 \approx 11.7$. В то же время для галактики Sextans лишь малое число экспериментальных точек пересекается линией идеального совпадения ($\chi_{\text{red}}^2 \approx 33.2$), а для Draco график демонстрирует практически полное расхождение, что подтверждается сверхвысоким значением $\chi_{\text{red}}^2 \approx 393$. Данные графики наглядно демонстрируют, что применяемая для описания динамики галактик рассматриваемая модель конформной гравитации (с постоянной анизотропией, однокомпонентным Пламмером, отсутствием учёта VSP) не справляется со своей задачей. Можно сделать вывод, что либо теория конформной гравитации требует более сложной (не реализованной пока в оригинальном методе GravSphere) модели, либо сама теория не в состоянии адекватно описывать данные наблюдений для карликовых сфероидальных галактик.



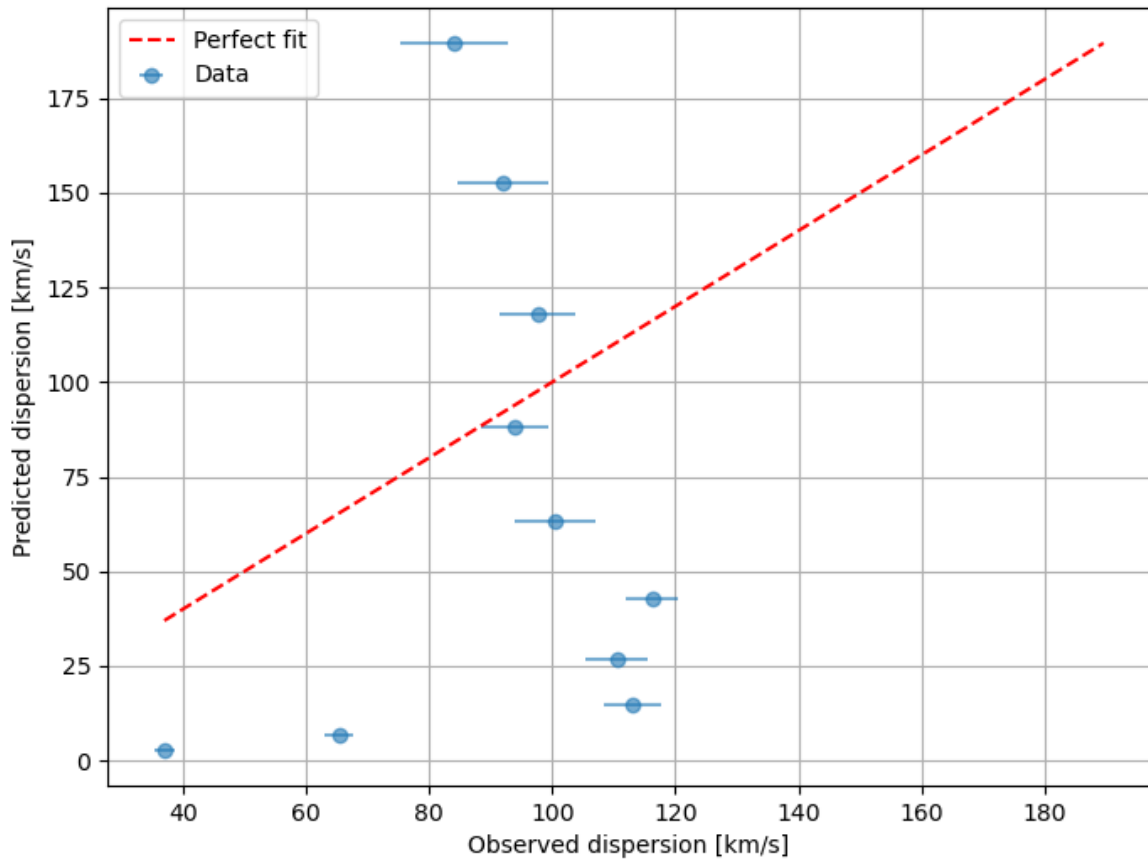
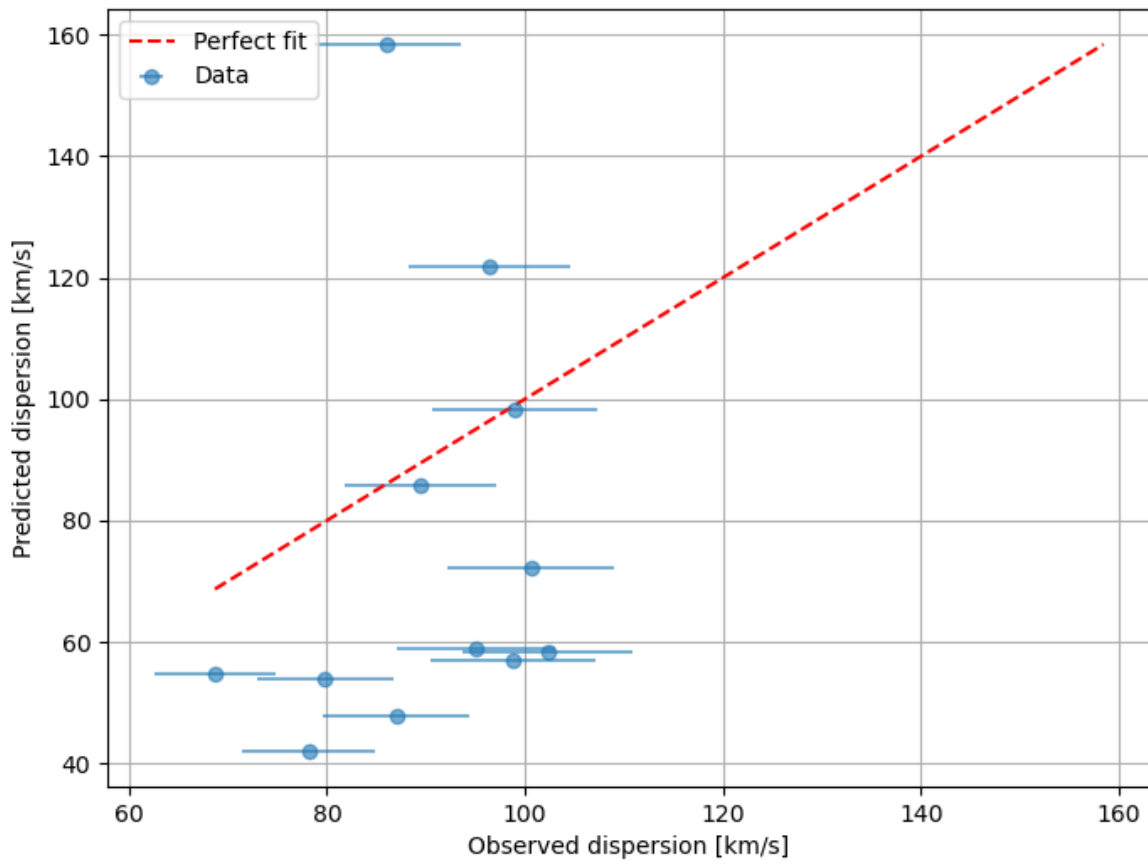


Рис. 3: Сравнение наблюдаемых и предсказанных значений лучевой дисперсии скоростей для карликовых сфероидальных галактик Antlia II, Sextans и Draco сверху вниз соответственно. Синие точки с погрешностями соответствуют экспериментальным данным, красным пунктиром обозначена линия идеального совпадения.

Заключение

В данной работе была рассмотрена и проанализирована теория конформной гравитации. Были разобраны теоретические проблемы этой теории, указывающие на её возможную несостоятельность и неспособность объяснить наблюдаемую динамику космологических объектов без помощи тёмной материи.

Также было проведено численное моделирование динамики карликовых галактик с помощью метода Gravsphere, модифицированного специально для конформной гравитации. Полученные в результате анализа данных наблюдений значения величин β^* , γ_0 , γ^* , κ , постулируемых Ф.Мангеймом как новые универсальные константы, оказались отличными от оригинальных, причём было установлено, что γ^* не является константой и зависит обратно пропорционально от звёздной массы галактики. Неспособность корректного моделирования динамики движения карликовых сфероидальных галактик может объясняться как излишним упрощением используемой модели, так и невозможностью теории конформной гравитации описать наблюдаемую динамику движения звёзд в галактиках.

Список литературы

- [1] P.D. Mannheim, D. Kazanas, Exact vacuum solution to Conformal Weyl Gravity and galactic rotation curves, *Astrophys. J.*, 342, 635, 1988.
- [2] P.D. Mannheim, J. G O'Brien, Galactic rotation curves in conformal gravity, 2012.
- [3] P.D. Mannheim, D. Kazanas, Newtonian Limit of Conformal Gravity and the Lack of Necessity of the Second Order Poisson Equation, 1993.
- [4] P.D. Mannheim, J. G O'Brien, Fitting galactic rotation curves with conformal gravity and a global quadratic potential, 2012.
- [5] P.D. Mannheim, Are galactic rotation curves really flat? , 1997.

- [6] Li-Xue Yue, Da-Ming Chen, Statistical Strong Lensing as a Test of Conformal Gravity, 2025.
- [7] M. C. Campigotto, A. Diaferio, L. Fatibene, Conformal gravity: light deflection revisited and the galactic rotation curve failure, 2017.
- [8] Li-Xue Yue, Da-Ming Chen, Test of conformal gravity as an alternative to dark matter from the observations of elliptical galaxies, 2025.
- [9] P.D. Mannheim, Unitarity of loop diagrams for the ghost-like $1/(k^2-M_1^2)-1/(k^2-M_2^2)$ propagator, 2018.
- [10] C. M. Bender, P.D. Mannheim, Giving up the ghost, 2008
- [11] Yi-Chan Lee, Min-Hsiu Hsieh, Steven T. Flammia, Ray-Kuang Lee, Local \mathcal{PT} symmetry violates the no-signaling principle, 2013.
- [12] J. Binney, S. Tremaine, Galactic dynamics, Princeton univ, 2008.
- [13] J. I. Read, P. Steger, How to break the density-anisotropy degeneracy in spherical stellar systems, 2017.
- [14] G. Japaridze, D. Pokhrel, Xiao-Qian Wang, No-signaling principle and Bell inequality in \mathcal{PT} -symmetric quantum mechanics, 2017.
- [15] H. Plummer, On the Problem of Distribution in Globular Star Clusters, 1911.
- [16] M.Campigotto, L.Fatibene, Gauge Natural Formulation of Conformal Gravity, 2015.
- [17] J. Alexandre, P. Millington, D. Seynaeve, Symmetries and conservation laws in non-Hermitian field theories, 2017.
- [18] Qi-Cheng Wu, Jun-Long Zhao, Yu-Liang Fang, Yu Zhang, Dong-Xu Chen, Chui-Ping Yang, F. Nori, Extension of Noether's theorem in \mathcal{PT} -symmetric systems and its experimental demonstration in an optical setup, 2023.
- [19] E. N. Kirby, J. G. Cohen, M. Bellazzini, The dynamics and metallicity distributton of the distant dwarf galaxy VV124*, 2013.
- [20] P.D. Mannheim, Making the Case for Conformal Gravity, 2011.